Progetto Olimpiadi della Matematica

Unione Matematica Italiana

Istruzioni Generali

- Si ricorda che per tutti i problemi bisogna indicare il numero intero del risultato che deve essere compreso tra `0` e `9999`, o comunque una sequenza di 4 cifre, magari anche con alcuni zeri iniziali. Ad esempio, le sequenze `53`, `053` e `0053` indicano la stessa risposta.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera. La ***parte intera*** di un numero reale x è il più grande intero minore od uguale ad x.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si risponda `0`.
- Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, oppure se non è univocamente determinata, si risponda `9999`.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati: $\sqrt{2} \approx 1,4142$ $\sqrt{3} \approx 1,7321$ $\sqrt{5} \approx 2,2361$ $\pi \approx 3,1416$.

da un'idea di

Alessandro Manzoni

con suggerimenti da parte del Trio

8 giugno 2020

Gara a Squadre – Testi dei problemi[1]

1. *Quel ramo del lago* (Silvia Sconza)

A.M. Quel ramo del lago di Como, che volge a mezzogiorno, tra due catene non interrotte di monti...

Tira-dritto (*Rivolto a Sfregiato*) Quante sono le date tra il 1 Gennaio 1000 e il 1 Gennaio 3000 che sono palindrome, cioè tali che, scritte nel formato $\mathrm{g}_1\mathrm{g}_2/\mathrm{m}_1\mathrm{m}_2/\mathrm{a}_1\mathrm{a}_2\mathrm{a}_3\mathrm{a}_4$, sia $\mathrm{g}_1 = \mathrm{a}_4$, $\mathrm{g}_2 = \mathrm{a}_3$, $\mathrm{m}_1 = \mathrm{a}_2$ e $\mathrm{m}_2 = \mathrm{a}_1$?

2. *L'incontro* (Sandro Campigotto)

A.M. (*Infastidito dall'interruzione*) Per una stradicciola, tornava bel bello dalla passeggiata verso casa, Don Abbondio, leggendo il suo breviario. Sulla prima pagina era riportato il numero 1; sulla seconda i numeri 1 e 2; sulla terza 1, 2 e 3... e così via. Don Abbondio pregava, ma prima eseguiva la somma di tutti numeri fin lì riportati: 1 alla prima pagina, 4 alla seconda, e via e via. Il curato, voltata la stradetta, e dirizzando, com'era solito, lo sguardo al tabernacolo, vide una cosa che non s'aspettava, proprio quando la somma che faceva divenne per la prima volta un numero di tre cifre...

Don Abbondio (*Rivolto ai bravi che contavano sulle dita*) Vedo che vi interessate di matematica. Sapete indovinare a che pagina sono arrivato?

3. *Non s'ha da fare* (Sandro Campigotto)

Sfregiato (*Sorpreso dalla domanda che Don Abbondio gli aveva posto*) Signor curato.

Don Abbondio Cosa comanda?

Sfregiato Lei ha intenzione, di maritar domani, Renzo Tramaglino e Lucia Mondella!

Don Abbondio (*Con voce tremolante*) Cioè... Lor signori son uomini di mondo, e sanno benissimo come vanno queste faccende. Il povero curato non c'entra: fanno i loro pasticci tra loro, e poi... e poi, vengon da noi, come s'anderebbe a un banco a riscotere. Sapete... è come se io avessi un gioiello e volessi venderlo al Monte dei Pegni. Io so che loro mi offrono i quattro quinti del valore, così io dico loro che vale un quarto di più per avere il giusto. Solo che l'ultima volta ne ho ricavato un decimo in meno del valore che avevo stimato.

Sfregiato Or bene, – questo matrimonio non s'ha da fare, né domani, né mai, e non mi cianci di alcuna frazione.

A.M. Qual era l'effettiva frazione applicata dal Monte dei Pegni?
[*Dare come risposta la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini*]

4. *Pettegolezzi* (Sandro Campigotto)

Perpetua Misericordia! cos'ha, signor padrone?

Don Abbondio Niente, niente.

Perpetua Che non può dir neppure a me? Chi si prenderà cura della sua salute? Chi le darà un parere?...

Don Abbondio Ohimè! Tacete, e non apparecchiate altro: datemi un bicchiere del mio vino.

Perpetua (*riempiendo il bicchiere per metà, e tenendolo poi in mano, come se non volesse darlo che in premio della confidenza che si faceva tanto aspettare*) - E lei mi vorrà sostenere che non ha niente!

Don Abbondio Date qui, date qui. (*Prende il bicchiere, con la mano non ben ferma, e lo vuota in fretta, come se fosse una medicina*)

Perpetua (*Riempiendo nuovamente il bicchiere di Don Abbondio per tre quarti*) Vuol dunque ch'io sia costretta di domandar qua e là cosa sia accaduto al mio padrone?

Don Abbondio Per amor del cielo! Non fate pettegolezzi, non fate schiamazzi: ne va... ne va la vita!

Perpetua Lei si scola una di queste bottiglie in 5 bicchieri colmi. È rimasto poco più di un litro... direi 105 cl. Vuole anche questi?

Don Abbondio Ma quanti centilitri m'ha fatto bere?

[1] In ogni problema, a fianco del titolo, compare il nome dell'autore.

5. *Alla locanda* (Silvia Sconza)

Renzo (*A tavola con Egidio e Tonio*) Lasciate, pago io per tutti.

Egidio Grazie! Il mio conto è un terzo di quello di Tonio.

Tonio Il mio conto è un terzo del tuo, Renzo.

Renzo Ciascuno di noi tre ha ordinato quattro piatti. Ogni piatto costa un multiplo di 5 soldi, e sicuramente meno di 200 soldi. Vado a pagare per tutti: quanto posso spendere al massimo?

6. *Che barba* (Simone Traverso)

Agnese Mancano 14 giorni al tuo matrimonio; la moda oggi richiede che lo sposo abbia la barba la più lunga possibile.

Renzo (*Toccandosi le guance disperato*) Sono glabro.

Agnese Ragiona, figlio mio! La tua barba cresce di mezzo millimetro al giorno; ma, ogni volta che ti raderai a zero usando questo balsamo, la velocità di crescita dei peli diventerà $1,5$ volte quella del giorno precedente. Ma fai attenzione: non ti fare la barba più di una volta al giorno, altrimenti i follicoli si irriteranno e rovinerai tutto il lavoro fatto. Perciò oggi non fartela più.

A.M. Quanti millimetri può essere lunga al massimo la barba di Renzo il giorno del matrimonio?

7. *La pista* (Cecilia Oliveri)

Tonio Renzo, la forma della pista da ballo per il matrimonio è dettata dalla tradizione: deve essere racchiusa in un decagono di perimetro 202 m. Ogni vertice del decagono coincide con il centro di una circonferenza e le circonferenze che hanno come centro due vertici adiacenti sono tangenti. Se la circonferenza più grande ha raggio r_1, altre due hanno raggio $r_2 = \frac{1}{3}r_1$; poi due hanno raggio $r_3 = \frac{1}{3}r_2$, due altre ancora hanno raggio $r_4 = \frac{1}{3}r_3$, poi due ancora hanno raggio $r_5 = \frac{1}{3}r_4$, e l'ultima ha raggio $r_6 = \frac{1}{3}r_5$.

Renzo (*Inebetito*) Ma quanto misura r_1 in cm?

8. *Il giorno* (Sandro Campigotto)

Renzo Son venuto, signor curato, per sapere a che ora le comoda che ci troviamo in chiesa?

Don Abbondio Di che giorno volete parlare?

Renzo Come, di che giorno? non si ricorda che s'è fissato per oggi?

Don Abbondio Oggi? Oggi, oggi... abbiate pazienza, ma oggi non posso.

Renzo Oggi non può! Cos'è nato?

Don Abbondio Prima di tutto, non mi sento bene, vedete.

Renzo Mi dispiace; ma quello che ha da fare è cosa di così poco tempo, e di così poca fatica...

Don Abbondio E poi, e poi, e poi...

Renzo E poi che cosa?

Don Abbondio E poi c'è degli imbrogli. Ad esempio. Su queste carte è richiesto scrivere tutti gli anagrammi della parola "MATRIMONIO" in cui nessuna vocale è vicina ad altra vocale e nessuna consonante è vicina ad altra consonante. Mi ci vorrà del tempo.

Renzo Ma quanti sono?

Don Abbondio Non lo so... ma quando avrò finito ve lo farò sapere.

9. *Tornando dalla filanda* (Silvia Sconza)

Lucia Ora vi dirò tutto.

Agnese Parla, parla!

Renzo (*Insieme*) Parlate, parlate!

Lucia Santissima Vergine! Chi avrebbe creduto che le cose potessero arrivare a questo segno. Tornando dalla filanda, mi era passato innanzi Don Rodrigo che mi ha chiesto quale fosse il più grande numero naturale a cinque cifre tale che ogni coppia di cifre vicine formi un numero divisibile per 2, ogni terna di cifre vicine formi un numero divisibile per 3, ogni quaterna di cifre vicine formi un numero divisibile per 4, e il numero di cinque cifre sia divisibile per 5.

Agnese (*In sottofondo, Milva canta* La filanda) Gli hai risposto?

Lucia Certo! Ma gli ho detto soltanto le prime quattro cifre da sinistra del numero.

Renzo Quali sono?

10. *Ingarbugliato* (Giulia Gaggero)

Azzeccagarbugli All'avvocato bisogna raccontare le cose chiare: a noi tocca poi imbrogliarle.

Renzo Bene! A partire da $n = 1$, per ogni numero intero positivo n scrivo la differenza tra il quadrato del successivo di n e il quadrato di n. Fino a che numero n devo arrivare per trovare, tra le differenze scritte, 24 numeri primi?

Azzeccagarbugli Diavolo! Possibile che non sappiate dirle chiare le cose!

11. ***Il soffitto*** (Luca Renzi)

Tonio La cappella ha venti pareti: è un icosagono. La decorazione che ho fatto per il soffitto consiste di travi sottili a tracciare i 20 lati e le 170 diagonali.

Renzo Quanti sono i triangoli rettangoli, che le travi, o parti di esse formano e che hanno il vertice dell'angolo retto sul perimetro dell'icosagono?

12. ***La fila*** (Luca Renzi)

Agnese Vedi questi sei pacchetti in fila.

Menico Certo, zia! Sembrano tutti uguali. Vuoi che te li metta alla rinfusa?

Agnese Esatto! Voglio che decidi una permutazione dei sei pacchetti, e la ripeti per tre volte consecutive.

Menico Zia, qual è la probabilità che, dopo averli permutati tre volte con la stessa permutazione, ci sia almeno un pacchetto che sia tornato al posto che occupa ora?
[*Dare come risposta la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini*]

13. ***Non sono un robot*** (Andrea Giusto)

Fra Cristoforo è davanti al castello di Don Rodrigo. Un cartello dice: Vietato l'ingresso ai robot e ai lombardi.

Fra Cristoforo Fatemi entrare.

Bravo a guardia dell'ingresso Frate, non sai leggere.

Fra Cristoforo Certo! Io vengo da ***; non sono lombardo.

Bravo a guardia dell'ingresso Per entrare devi dimostrare di non essere un robot: rispondi alla domanda seguente. Quanti sono i polinomi $P(x)$ con coefficienti 0,1 o 2 e tali che $P(2) = 2020$?

14. ***Il volo*** (Anna Ulivi)

Griso (*A fianco di Fra Cristoforo*) Fossi libero di muovermi per la Lombardia come quegli uccelli in cielo! (*Uno stormo di uccelli forma un triangolo in cielo; si vede un'aquila che volteggia sopra allo stormo*). Sembra che l'aquila disegni una circonferenza intorno al triangolo. (*Senza curarsi del frate*) Se disegno su un foglio la forma dello stormo e il percorso dell'aquila, ottengo un triangolo ABC e una circonferenza di cui il lato AB è un diametro. La circonferenza incontra il lato AC in un punto E. Traccio una retta parallela ad AB e tangente alla circonferenza in F, chiamo X e Y le intersezioni di tale retta con AC e BC rispettivamente, e vedo che $XF = XE = 36\,\text{cm}$ e $YB = 39\,\text{cm}$.

A.M. Qual è l'area di ABC in cm^2?

15. ***Nel castello*** (Andrea Giusto)

Nel castello di Don Rodrigo, conte di Fuentes, Mendoza, Deferia, duca di Terranova, contestabile di Castiglia, ci sono servi, che dicono sempre la verità, e bravi, che dicono sempre il falso. Nel cortile ci sono 2020 persone, tra servi e bravi, numerate da 1 a 2020.

A.M. Siano m, n due interi positivi tali che $m + n = 2020$ e che $m, n > 1$.

Persona 1 Non c'è nessuno che dice la verità.

Persona 2 Ci sono esattamente 2 persone che dicono la verità.

Persona 3 Ci sono esattamente 3 persone che dicono la verità.

$\vdots$

Persona n Ci sono esattamente n persone che dicono la verità.

Persona $n + 1$ Ci sono esattamente m persone che dicono la verità.

$\vdots$

Persona 2020 Ci sono esattamente m persone che dicono la verità.

A.M. Qual è il minimo numero possibile di persone che dicono la verità al variare di m e n?

16. ***In cammino*** (Luca Renzi)

Renzo Guarda che strana forma hanno quei covoni di fieno!

Agnese Sono fatti alla vecchia maniera: si disegna a terra un esagono regolare di area $20\,\text{m}^2$; poi, all'esterno dell'esagono, per ogni lato dell'esagono si disegna un triangolo equilatero, con un lato coincidente con il lato dell'esagono.

Lucia Il poligono risultante dall'unione dell'esagono e dei sei triangoli equilateri è una stella a sei punte.

Agnese Esatto! Infine si pianta un palo alto 3 m nel centro dell'esagono. Si ottiene il covone facendo in modo che gli spigoli laterali del solido congiungano ognuno dei dodici vertici della stella alla base base con la cima del palo.

A.M. Quanto vale in m^3 il volume del covone?

17. ***A Pescarenico*** (Silvia Sconza)

Lucia A Pescarenico ci sono 3586 persone: alcune sono sincere, e dicono sempre la verità; altre sono bugiarde, e dicono sempre il falso. Renzo, è troppo pericoloso; dobbiamo scappare.

Renzo Fermiamo questi sei abitanti di Pescarenico.

Lucia Ma non sai se sono sinceri o bugiardi!

Renzo (*Rivolto a sei abitanti di Pescarenico.*) Quanti sono gli abitanti bugiardi di Pescarenico?

Primo abitante Ci sono un numero pari di bugiardi.

Secondo abitante Ci sono un numero divisibile per 3 di bugiardi.

Terzo abitante Ci sono un numero divisibile per 4 di bugiardi.

Quarto abitante Ci sono un numero divisibile per 5 di bugiardi.

Quinto abitante Ci sono un numero divisibile per 7 di bugiardi.

Sesto abitante Ci sono tanti sinceri quanti bugiardi.

Lucia Qual è il numero massimo di Pescarenicesi bugiardi compatibile con tutte le affermazioni?

Fra Cristoforo E qual è il numero minimo?

[*Dare come risposta la somma dei due numeri.*]

18. ***Progetti*** (Anna Ulivi)

L'innominato Nibbio, vorrei il tuo parere su' novi progetti per il castello. A cuore dell'idea sono tre cubi. (*Il Nibbio si preoccupa*) Si considerano solidi costruiti nel seguente modo: dato un cubo di lato 12 m, nel suo centro sta uno dei vertici di un secondo cubo uguale al primo e con i lati paralleli ai lati del primo; nel centro del cubo generato dall'intersezione dei due precedenti sta un vertice di un terzo cubo con le stesse dimensioni e con i lati paralleli agli altri due. Il castello avrà quest forma.

Nibbio Ma ci sono molti solidi determinati da questi dati. Qual è il volume massimo di un solido cosí determinato? E il volume minimo?

[*Dare come risposta la somma dei due volumi.*]

19. ***Nella locanda*** (Silvia Sconza)

Renzo Che cosa fate con quel mazzo?

Locandiere È un mazzo che comprende le 28 carte dei valori da 1 a 7 dei quattro semi: cuori, quadri, fiori, picche. Impilo sette carte sul banco una sopra all'altra in modo tale che: se c'è almeno un 7, almeno uno di essi deve avere un 6 rosso subito sotto; la carta più in alto deve essere una di valore massimo tra le presenti; non possono esserci due carte pari vicine né due carte dispari vicine; la somma delle tre carte più in alto deve essere esattamente uguale alla metà della somma delle quattro carte più in basso. Poi faccio scegliere al cliente una carta nel mazzo. Se è un asso, la bevuta è gratis.

Renzo Ma quante sono le combinazioni di 7 carte che soddisfano le richieste e tali che la carta più sotto sia di valore massimo possibile tra tutte le configurazioni ammesse?

20. ***La stella*** (Cecilia Oliveri)

Don Ferrante Disegna un ottagono regolare e costruisci al suo interno una stella a 8 punte procedendo in questo modo: scegli un vertice A; in senso orario a partire dal vertice A, indica gli altri vertici in ordine con i nomi F, C, H, E, B, G, D (*Donna Prassede esegue attentamente*); congiungi ora con un segmento ogni coppia di lettere alfabeticamente consecutive, infine traccia il segmento AH. Dimmi la misura di AB.

Donna Prassede È lungo $18,42$ cm.

Don Ferrante Allora, quanto vale l'area dell'ottagono piccolo all'interno della stella?

21. ***A Bergamo*** (Giuseppe Rosolini)

Renzo Ci sono fattoriali che hanno scomposizioni fattoriali, ad esempio $6! = 3! \cdot 5!$. Chissà quanti sono?

Lucia Beh, il tuo esempio è un caso particolare di una situazione molto più generale: prendi k numeri interi positivi $\ell_1,\ldots,\ell_k$ e fissa $n = \ell_1! \cdot \ldots \cdot \ell_k!$. Basta usare la definizione per dimostrare che $n! = \ell_1! \cdot \ldots \cdot \ell_k! \cdot (n-1)!$ è una scomposizione con $k+1$ fattoriali.

Renzo D'accordo! Ma ci sono fattoriali $n!$, diciamo con $n < 4!$, che hanno scomposizioni fattoriali $\ell_1! \cdot \ldots \cdot \ell_k!$ dove $k > 1$ e ℓ_i è maggiore di 1 e minore di $n-1$ al variare di i da 1 a k?

[*Dare come risposta la somma di tutti i numeri ℓ_i il cui fattoriale compare in almeno uno di tali scomposizioni.*]