Unione Matematica Italiana
Ministero dell'Istruzione

Olimpiadi della Matematica

Gara di Febbraio

20 febbraio 2020

Da riempirsi da parte dello studente:

Nome:__________ Cognome:__________ Genere: F M

Data di nascita:__________ Taglia per eventuale maglietta: S M L XL

Scuola:__________ Anno di corso: 1 2 3 4 5

Città:__________

1. Non sfogliare questo fascicoletto finché l'insegnante non ti dice di farlo. Non è ammesso l'utilizzo di calcolatrici, libri di testo e tavole numeriche. È proibito comunicare con altri concorrenti o con l'esterno; in particolare, è vietato l'uso di telefoni cellulari.
2. La prova consiste di 17 problemi divisi in 3 gruppi.
3. Nei problemi dal numero 1 al numero 12 sono proposte 5 risposte possibili, indicate con **A, B, C, D, E**. **Una sola** delle risposte è corretta. La lettera corrispondente alla risposta corretta dovrà essere riportata, per ogni quesito, in questa pagina nella relativa finestrella più in basso. Ogni risposta **giusta vale 5 punti**, ogni risposta **errata vale 0 punti** e ogni problema lasciato **senza risposta vale 1 punto**.
4. I problemi 13 e 14 richiedono una risposta che è data da un numero intero. Questo numero intero va indicato in questa pagina nella relativa finestrella più in basso. Ogni risposta **giusta vale 5 punti**, ogni risposta **errata vale 0 punti** e ogni problema lasciato **senza risposta vale 1 punto**.
5. I problemi 15, 16 e 17 richiedono invece una dimostrazione. Ti invitiamo a formulare le soluzioni in modo chiaro e conciso usufruendo dello spazio riservato e consegnando soltanto i fogli di questo fascicoletto. Tali problemi verranno valutati con un punteggio **da 0 a 15**.
6. Quando l'insegnante dà il via, comincia a lavorare. Hai **3 ore** di tempo. Buon lavoro!
7. Per correttezza nei confronti di coloro che facessero la gara in momenti diversi della mattina, ti chiediamo di non diffondere informazioni sul testo e sulle risposte prima delle 14.30. Grazie!

Risposte ai primi 14 quesiti

(Non sono ammesse correzioni o cancellature)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Da riempirsi a cura dell'insegnante:

Valutazione esercizi dimostrativi

15	16	17

Punteggio totale
(da foglio di calcolo)

Visitate il sito internet delle olimpiadi:
`http://olimpiadi.dm.unibo.it`
ed il forum delle olimpiadi: `http://www.oliforum.it`

Questa gara non sarebbe stata possibile senza la preziosa collaborazione di tutti coloro che hanno proposto, risolto, modificato e testato i problemi:
Alberto Cagnetta, Alessandro Iraci, Andrea Ciprietti, Andrea Gallese, Andrea Pitrone, Bernardo Forni, Bernardo Tarini, Chiara Ricciuti, Edoardo Bertoletti, Federica Bertolotti, Federico Poloni, Federico Viola, Filippo Girardi, Giacomo Gallina, Giona Micossi, Giovanni Acerbi, Giovanni Barbarino, Giuseppe Mascellani, Giuseppe Romanazzi, Linda Friso, Lorenzo Benedini, Lorenzo Furio, Luca Ambrosino, Luca Francesco D'Alessandro, Lucio Tanzini, Ludovico Pernazza, Marcello Mamino, Marco Trevisiol, Matteo Palmieri, Matteo Protopapa, Matteo Rossi, Michele Longo, Nikita Deniskin, Paolo Leonetti, Riccardo Zanotto, Sandro Campigotto, Sebastiano Boscardin, Simone Masserini, Simone Pelizzola e Simone Vincini.

Alessandra Caraceni, Luigi Amedeo Bianchi e Davide Lombardo

Problemi a risposta multipla – 5 punti

1. Se si taglia un foglio A4 precisamente a metà lungo una retta parallela al lato più corto, si creano due fogli che hanno la stessa forma di quello originale, cioè che si ottengono da esso tramite una rotazione e una riduzione di scala. Quest'anno diremo che un foglio rettangolare è "contemporaneo" se, tagliandolo in 2020 parti uguali ottenute con tagli paralleli al suo lato più corto, si ottengono 2020 rettangoli che hanno la stessa forma di quello iniziale. Se il lato corto di un foglio contemporaneo misura 1, quanto è lungo l'altro lato?

   (A) $\sqrt{2020}$ **(B)** $2020^{3/2}$ **(C)** $\frac{2021}{2}$ **(D)** 2020 **(E)** Nessuna delle precedenti

2. Alberto e Barbara scrivono dei numeri alla lavagna. Parte Alberto e scrive il numero reale x. Poi Barbara scrive il numero 1. I due poi si alternano, e ad ogni turno scrivono un numero. Alberto nel suo turno moltiplica l'ultimo numero scritto per x^2 e scrive il risultato. Barbara nel suo turno somma all'ultimo numero scritto $x + 1$ e scrive il risultato.

   Si fermano quando sulla lavagna sono scritti 2020 numeri. Quali delle seguenti affermazioni è sempre vera?

   (A) C'è almeno un numero negativo scritto sulla lavagna **(B)** Tutti i numeri scritti alla lavagna sono positivi **(C)** Alberto ha scritto solo numeri positivi **(D)** Alberto ha scritto solo numeri negativi **(E)** Barbara ha scritto solo numeri positivi

3. Anna, Bianca, Carla e Diana sono quattro donne di età (in anni) diverse. Le loro età sono numeri primi la cui somma è 240. Sapendo che nessuna di loro ha più di 70 anni, qual è l'età della più giovane?

   (A) 47 **(B)** 53 **(C)** 57 **(D)** 61 **(E)** 67

4. Lucia, dopo aver disegnato il quadrato $ABCD$ di lato unitario, traccia una circonferenza di centro C e raggio uguale al lato del quadrato. Indica poi con X l'intersezione tra la diagonale AC e la circonferenza, e con Y l'intersezione della retta DX con il lato AB. Quanto vale la lunghezza del segmento AY?

   (A) $\frac{\sqrt{2}+1}{6}$ **(B)** $\sqrt{2}-1$ **(C)** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ **(D)** $\dfrac{3+\sqrt{2}}{8}$ **(E)** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

5. Attorno a un tavolo rotondo sono sedute, a distanza costante l'una dalla successiva, 32 persone. In quanti modi è possibile scegliere 3 di loro in modo che a coppie non siano né adiacenti né diametralmente opposte?

   (A) 2246 **(B)** 2480 **(C)** 3616 **(D)** 24128 **(E)** Nessuna delle precedenti

6. Zanobi e Veronica vanno in piscina assieme e iniziano in contemporanea a nuotare avanti e indietro, a velocità costanti ma diverse, ciascuno nella propria corsia, a partire dallo stesso lato della piscina. Veronica si accorge che, nel momento in cui completa 28 vasche (cioè finisce di percorrere per 28 volte la lunghezza della piscina), Zanobi si trova accanto a lei. Non appena completa 70 vasche, Veronica smette di nuotare ed esce dall'acqua; nello stesso momento, anche Zanobi arriva sul bordo della piscina, smette di nuotare ed esce dall'acqua accanto a Veronica. Zanobi, che è più lento di Veronica, ha fatto m vasche; quanti diversi valori può assumere m?

   (A) 1 **(B)** 3 **(C)** 6 **(D)** 35 **(E)** 69

7. Sia $ABCD$ un rettangolo e siano M, N punti interni, rispettivamente, ai lati AB e BC. Supponiamo che $MC = CD$, $MD = MN$ e che i punti C, D, M, N appartengano a una stessa circonferenza.

   Quanto vale il rapporto AB/BC?

   (A) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ **(B)** $\sqrt{2}$ **(C)** $\frac{3}{2}$ **(D)** $\sqrt{3}$ **(E)** 2

8. Aisha scrive su un foglio tutti i numeri da 1 a 2020. Quanto vale la differenza tra il numero di cifre "1" e il numero di cifre "0" che ha scritto?

   (A) 78 **(B)** 1010 **(C)** 1089 **(D)** 2020 **(E)** 5005

9. I numeri reali $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{30}$ verificano le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} 20^3 x_1 + 21^3 x_2 + 22^3 x_3 + \cdots + 49^3 x_{30} = 13 \\ 21^3 x_1 + 22^3 x_2 + 23^3 x_3 + \cdots + 50^3 x_{30} = 1 \\ 22^3 x_1 + 23^3 x_2 + 24^3 x_3 + \cdots + 51^3 x_{30} = 19. \end{cases}$$

Quanto vale $21x_1 + 22x_2 + 23x_3 + \cdots + 50x_{30}$?

(A) Ci sono più valori accettabili **(B)** Il sistema non ha soluzione **(C)** 1065 **(D)** 7 **(E)** 5

10. Agnese, Beatrice, Claudio e Dario giocano con 53 pile di monete. Comunque prese due pile, queste hanno un numero diverso di monete. Ad ogni turno, un giocatore sceglie una pila e toglie da questa una moneta. Perde chi togliendo una moneta a una pila rende questa pila di altezza uguale a un'altra presente sul tavolo.

Una pila può avere 0 monete e due pile con 0 monete sono considerate uguali. Comincia Agnese, poi in ordine giocano Beatrice, Claudio e Dario, dopo di che tocca nuovamente ad Agnese e si procede sempre in questo ordine.

Se all'inizio del gioco ci sono 2020 monete in totale e se tutti giocano al meglio, chi perde?

(A) Agnese **(B)** Beatrice **(C)** Claudio **(D)** Dario **(E)** Non è possibile determinarlo con questi dati

11. Sia ABC un triangolo e sia D il piede della bisettrice uscente dal vertice A. Sia ω la circonferenza tangente ad AC in A e passante per D. Sia P la seconda intersezione di ω con la retta BC. Sapendo che $AC = 54$, $AD = 63$ e $CP = 108$, trovare AB.

(A) 72 **(B)** $\dfrac{147}{2}$ **(C)** 98 **(D)** 99 **(E)** 102

12. Dato il polinomio

$$(x^2 + 5x - 19)^{50} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{100} x^{100},$$

si consideri la quantità

$$M = a_0 - a_1 + 4a_2 - 9a_3 + 16a_4 - 81a_5 + 64a_6 - 729a_7 + \cdots + 2^{98} a_{98} - 3^{98} a_{99} + 2^{100} a_{100},$$

in cui il coefficiente di a_{2k} è 2^{2k} e il coefficiente di a_{2k+1} è -3^{2k}. Qual è la massima potenza di 5 che divide M?

(A) 5^0 **(B)** 5^1 **(C)** 5^5 **(D)** 5^{50} **(E)** 5^{100}

Problemi a risposta numerica – 5 punti

13. Lo scassinatore Fabio è alle prese con una cassaforte protetta da una combinazione di 5 cifre, ciascuna fra 1 e 9. Fortunatamente per lui, gli sprovveduti padroni di casa hanno lasciato un foglietto con qualche indicazione: "Siano a, b, c, d ed e, nell'ordine, le cinque cifre della combinazione. Allora sia ae che abe che $abde$, letti come numeri in base 10, sono divisibili per 11, ma $abcde$ non lo è." Quanti tentativi dovrà fare al più Fabio per essere sicuro di riuscire ad aprire la cassaforte?

14. Quanti sono i polinomi $p(x)$ a coefficienti reali, di grado compreso fra 1 e 2020 (estremi inclusi), per cui esiste un numero reale α tale che l'equazione $p(x)^2 = p\left(x^2\right) + \alpha p(x)$ sia verificata per ogni numero reale x?

15. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

(a) Supponiamo che $n = k^2$ sia un quadrato perfetto. Dimostrare che il numero di divisori positivi di n strettamente minori di k è uguale al numero di divisori di n strettamente maggiori di k.

(b) Supponiamo che $n = k^2$ sia un quadrato perfetto. Dimostrare che n ha al massimo $2k - 1$ divisori positivi.

(c) Trovare tutti gli interi positivi k tali che k^2 abbia esattamente $2k - 1$ divisori positivi.

SOLUZIONE:

Nome:____________________ Cognome:____________________

16. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

Su un enorme foglio a quadretti, Marco considera un rettangolo lungo 2020 quadretti e alto 2. A questo punto vuole unire con 2020^2 segmenti ciascuno dei 2020 centri dei quadretti nella fila inferiore del rettangolo a ciascuno dei centri dei quadretti della fila superiore. Inoltre, vuole che se due di questi segmenti si intersecano (eventualmente anche solo in un estremo) siano tracciati con penne di colore diverso.

(a) Dimostrare che è impossibile soddisfare le richieste di Marco se si hanno solo penne di 4038 colori diversi.

(b) Dimostrare che è invece possibile tracciare i segmenti secondo le richieste di Marco utilizzando 4039 colori.

SOLUZIONE:

Nome:____________________ Cognome:____________________

17. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

Sia ABC un triangolo scaleno con $BC > CA > AB$. Siano ω e γ le circonferenze passanti per A di centro, rispettivamente, B e C. Esse intersecano il segmento BC in M e N, rispettivamente. Costruiamo Z come il simmetrico di A rispetto al punto medio di MN.

(a) Chiamata P l'intersezione di ZM con AC, mostrare che CPM è isoscele.

(b) Detta X l'intersezione di ZM con ω distinta da M, mostrare che BX e AC sono parallele.

(c) Detta Y l'intersezione di ZN con γ distinta da N, mostrare che A, X e Y sono allineati.

SOLUZIONE:

Nome:____________________Cognome:____________________

Soluzione dei Quesiti

1. La risposta è **(A)**. Indichiamo con x la lunghezza del lato lungo del foglio contemporaneo. I rettangoli ritagliati hanno lo stesso rapporto tra i lati, ma sappiamo che il loro lato lungo misura 1, mentre il loro lato corto misura $\frac{x}{2020}$. Scrivendo l'uguaglianza tra i rapporti, cioè la proporzione, abbiamo: $x : 1 = 1 : \frac{x}{2020}$, da cui $x^2 = 2020$, cioè $x = \sqrt{2020}$.

2. La risposta è **(E)**. Possiamo procedere per esclusione. La **(A)** è falsa perché se $x > 0$ allora ad ogni turno Alberto e Barbara moltiplicano e sommano numeri positivi a quelli già presenti sulla lavagna. Dato che i primi due numeri sono x e 1, allora non c'è nessun numero negativo sulla lavagna. **(B)** e **(C)** sono false perché x può essere negativo. **(D)** è falsa perché x può essere positivo.

   Per dimostrare che la **(E)** è effettivamente vera, osserviamo che i primi numeri scritti da Barbara sono 1, $1 + x + x^2$, $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = 1 + x + x^2(1 + x + x^2)$, e che in generale Barbara scriverà espressioni della forma $1 + x + \ldots + x^{2n}$. Un numero di questo tipo è necessariamente positivo. In effetti, se $x = 1$ questo è ovvio, e in caso contrario la somma si può calcolare tramite le proprietà delle progressioni geometriche: si ha $1 + x + \ldots + x^{2n} = \frac{x^{2n+1}-1}{x-1}$, che è positivo perché numeratore e denominatore hanno lo stesso segno (positivo se $x > 1$, negativo se $x < 1$).

3. La risposta è **(B)**. Siano $a < b < c < d$ i quattro numeri primi corrispondenti alle età. Allora

   $$60 = \frac{a+b+c+d}{4} < \max\{a,b,c,d\} = d < 70.$$

   Quindi abbiamo solo due possibilità: $d = 61$ oppure $d = 67$. Se d fosse 61, allora $a < b < c < 60$ per cui

   $$240 = a + b + c + d < 3 \cdot 59 + 61 < 240,$$

   ed è impossibile. Altrimenti $d = 67$ ed essendo $a < b < c < d$ abbiamo $a \leq 53$, $b \leq 59$, $c \leq 61$. D'altra parte

   $$240 = a + b + c + d \leq 53 + 59 + 61 + 67 = 240,$$

   per cui $(a,b,c,d) = (53,59,61,67)$ è l'unica soluzione[1].

4. La risposta è **(B)**. Tracciamo la retta r perpendicolare al lato AD e passante per X. Sia H l'intersezione fra r ed AD, e sia K l'intersezione fra CB ed r. Sia J la proiezione di X sul lato CD. Mostriamo intanto che i triangoli DHX e DAY sono simili. Infatti, $\angle XDH = \angle YDA$ poiché in comune fra i due triangoli, e $\angle DHX = \angle DAY = 90°$, poiché il primo è l'angolo che formano le due rette perpendicolari HX e AD, mentre il secondo è l'angolo di un quadrato; il primo criterio di similitudine fra triangoli porta alla conclusione che cercavamo. Da ciò ricaviamo che

   $$\frac{HX}{DH} = \frac{AY}{AD} = \frac{AY}{AB}.$$

   Notiamo ora che $CKDJ$ forma un quadrato: infatti ha tre angoli uguali a $90° = \angle CJX = \angle XKC = \angle KCJ$, i primi due perché angoli formati da due rette ortogonali e l'ultimo perché angolo di un quadrato. Perciò abbiamo $KX = CK = CJ$. Chiamiamo ℓ il lato del quadrato. Siccome $CX = CB = \ell$, raggio della circonferenza, abbiamo che $CX = \sqrt{2} \cdot CK$. $KCDH$ è un rettangolo, perché ha tutti gli angoli retti, pertanto si può ottenere la relazione $CK = DH$, e per differenza di segmenti $HX = HK - XK = DC - JC$. Mettendo insieme quanto trovato, otteniamo che $DH = CK = \frac{\ell}{\sqrt{2}}$ e che $HX = DC - CJ = \ell - \frac{\ell}{\sqrt{2}} = \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)\ell$. Possiamo ora concludere, poiché

   $$\frac{AY}{AB} = \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1.$$

[1] Tra le risposte è presente 57, che pur non essendo un numero primo, è "primo di Grothendieck". Si narra infatti che Alexander Grothendieck (1928-2014), grande matematico dalla storia molto particolare, ad una conferenza rispose alla domanda *Potrebbe fare un esempio con un numero primo specifico?* dicendo *Prendiamo ad esempio $p = 57$.*

5. La risposta è **(C)**. Selezioniamo le persone una alla volta. All'inizio non abbiamo vincoli, quindi possiamo scegliere la prima persona in 32 modi. Possiamo ora scegliere la seconda persona in 28 modi, escludendo dalle 32 la persona già selezionata, le due adiacenti ad essa e quella di fronte. Tuttavia non possiamo considerarle tutte assieme, perché a seconda di come scegliamo la seconda persona, la terza può essere scelta in modi diversi.

   - Se scegliamo la seconda persona tra i due posti adiacenti a quello diametralmente opposto alla nostra prima scelta, questa esclude un solo posto, oltre ai tre già bloccati prima e ai due presi. Infatti dei due adiacenti, uno era già bloccato (diametralmente opposto al primo) e uno solo viene bloccato ora, mentre quello diametralmente opposto era già stato escluso in quanto adiacente al primo. Quindi possiamo scegliere il terzo tra $32 - 1 - 3 - 2 = 26$ posti, per un totale di $32 \cdot 2 \cdot 26$ scelte per questo primo caso.
   - Se scegliamo la seconda persona tra i due posti vicini ai due adiacenti alla nostra prima scelta, andiamo ad escludere il posto appena preso, uno dei due posti adiacenti (l'altro era già bloccato) e il posto diametralmente opposto. Quindi possiamo scegliere il terzo tra $32 - 1 - 3 - 3 = 25$ posti, per un totale di $32 \cdot 2 \cdot 25$ combinazioni.
   - Se scegliamo la seconda persona tra i 24 posti rimanenti, una volta esclusi quelli dei due casi precedenti, tale scelta ci esclude 4 posti (quello scelto, i due adiacenti e quello opposto), per un totale di $32 \cdot 24 \cdot 24$ combinazioni.

   In totale abbiamo quindi $32(24^2 + 2 \cdot 25 + 2 \cdot 26)$ possibili scelte, da dividere per $3! = 6$ siccome abbiamo tenuto conto dell'ordine nella scelta delle persone.

6. La risposta è **(C)**. Sappiamo che Zanobi è più lento di Veronica. In particolare, esiste un fattore $k > 1$ tale che $v_V = kv_Z$, dove v_V e v_Z sono le velocità di Veronica e Zanobi, rispettivamente.

   Veronica completa 28 vasche in tempo T. Possiamo calcolare il numero L_Z di vasche percorse da Zanobi come segue: la velocità di Veronica è $v_V = 28/T$, quella di Zanobi è $v_Z = L_Z/T$. Ma allora
   $$L_Z = Tv_Z = \frac{28}{v_V}v_Z = \frac{28}{k}.$$

   Alla fine delle 28 vasche, Veronica si trova sulla stessa sponda da cui era partita e, dato che Zanobi si trova alla stessa altezza, anche lui deve avere completato un numero intero e pari di vasche. Affinché k sia un valore valido, quindi, deve valere $k = 28/L_Z > 1$, dove L_Z è un numero pari maggiore di zero e minore di 28.

   Possiamo ripetere il medesimo ragionamento quando Veronica compie 70 vasche: dobbiamo imporre che $70/k$ sia pari e intero, ma
   $$70/k = L_Z \cdot 70/28 = L_Z \cdot 5/2 = 5 \cdot (L_Z/2)$$
   che è sempre intero, ed è pari se e solo se L_Z è un multiplo di 4. Gli unici valori di L_Z e k validi sono pertanto $L_Z \in \{4, 8, 12, 16, 20, 24\}$, da cui $k = 28/L_Z \in \{7, 7/2, 7/3, 7/4, 7/5, 7/6\}$. Essi corrispondono ai seguenti possibili valori per il numero m di vasche fatte da Zanobi:
   $$m = 70/k \in \{10, 20, 30, 40, 50, 60\}.$$

7. La risposta è **(B)**. Dal momento che il quadrilatero $CDMN$ è circoscrivibile, sappiamo che l'angolo $\angle CDM$ è uguale al supplementare dell'angolo $\angle MNC$, cioè all'angolo $\angle MNB$. D'altra parte, gli angoli $\angle CDM$ e $\angle AMD$ sono uguali, in quanto angoli alterni interni formati dalle parallele AB e CD con la trasversale DM. Ne deduciamo quindi che $\angle AMD = \angle MNB$.

   I triangoli rettangoli ADM e BMN hanno dunque un angolo acuto uguale e, per ipotesi, ipotenuse uguali ($DM = MN$) e sono dunque congruenti. In particolare risulta $AD = MB$, e, poiché $AD = BC$, il triangolo BCM è isoscele rispetto alla base CM (oltre a essere rettangolo in B), per cui il rapporto tra la sua ipotenusa e uno dei cateti è $\sqrt{2}$. Vale allora $AB/BC = CD/BC = CM/BC = \sqrt{2}$.

8. La risposta è **(C)**. Osserviamo che, dato un numero con scrittura decimale $abcd$, se fissiamo $a \neq 0$, abbiamo 10 scelte per ciascuna delle cifre b,c,d: tra queste 10 scelte, esattamente una è "1", come anche esattamente una è "0". Notiamo inoltre che lo stesso ragionamento può essere fatto con un numero a tre cifre abc e a due cifre ab.

   Questo ci permette di dire che, se $a \neq 1$, il numero di "1" e il numero di "0" tra $a000$ e $a999$ è lo stesso; se invece $a = 1$, avremo 1000 "1" (derivanti dalla cifra a scritta mille volte) in più degli "0".

   Similmente, se $a \neq 1$, il numero di "1" e "0" tra $a00$ e $a99$ e tra $a0$ e $a9$ è lo stesso. Se invece $a = 1$ abbiamo 100 "1" in più tra 100 e 199 e 10 "1" in più tra 10 e 19.

   Chiamiamo ΔN, la differenza tra il numero di "1" e il numero di "0" nell'insieme di numeri N. Possiamo allora affermare che:

   - Detto N_1 l'insieme dei numeri tra 1 e 9 abbiamo $\Delta N_1 = 1$;
   - detto N_2 l'insieme dei numeri tra 10 e 19 abbiamo $\Delta N_2 = 10$;
   - detto N_3 l'insieme dei numeri tra 20 e 99 abbiamo $\Delta N_3 = 0$;
   - detto N_4 l'insieme dei numeri tra 100 e 199 abbiamo $\Delta N_4 = 100$;
   - detto N_5 l'insieme dei numeri tra 200 e 999 abbiamo $\Delta N_5 = 0$;
   - detto N_6 l'insieme dei numeri tra 1000 e 1999 abbiamo $\Delta N_6 = 1000$.

   Rimane solo da contare ΔN_7 con N_7 l'insieme dei numeri tra 2000 e 2020, ma è facile verificare che $\Delta N_7 = -22$. Dunque, se N è l'insieme di tutti i numeri tra 1 e 2020, $\Delta N = \sum_{i=1}^{7} \Delta N_i = 1111 - 22 = 1089$.

9. La risposta è **(E)**. Sommando la prima equazione alla terza, si ottiene un'equazione della forma $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_{30}x_{30} = 32$, dove $a_1 = (21+1)^3 - (21-1)^3 = 21^3 + 3 \cdot 21^2 + 3 \cdot 21 + 1 + 21^3 - 3 \cdot 21^2 + 3 \cdot 21 - 1 = 2 \cdot 21^3 + 6 \cdot 21$, $a_2 = (22+1)^3 - (22-1)^3 = 2 \cdot 22^3 + 6 \cdot 22$, e in generale $a_i = 2 \cdot (20+i)^3 + 6 \cdot (20+i)$. Ora, sottraendo a questa equazione la seconda equazione del sistema moltiplicata per due, si ottiene l'equazione $6 \cdot 21x_1 + 6 \cdot 22x_2 + \ldots + 6 \cdot 50x_{30} = 32 - 2 = 30$. Di conseguenza, se $x_1, \ldots, x_{30}$ soddisfano le tre equazioni del sistema, allora $21x_1 + 22x_2 + \ldots + 50x_{30} = 30/6 = 5$.

   D'altra parte, il sistema ha effettivamente soluzione (in effetti ne ha infinite possibili!). Anche ponendo per esempio $x_4 = x_5 = \ldots = x_{30} = 0$, è possibile calcolare valori di x_1, x_2, x_3 che soddisfino il sistema tramite sostituzioni successive.

10. La risposta è **(C)**. Chiamiamo $a_1, a_2, \ldots, a_{53}$ le pile ordinate in ordine crescente di altezza.

    Osserviamo che il gioco finisce. Ad ogni mossa il numero totale di gettoni diminuisce di 1, e se ci sono 51 gettoni in totale allora il gioco è già finito perché ci sono almeno due pile con 0 gettoni.

    Sicuramente se la partita non è già stata persa a_i avrà meno gettoni di a_j se $i < j$: se così non fosse, dato che ad ogni mossa il numero di gettoni diminuisce di 1, c'è un momento in cui le due pile hanno lo stesso numero di gettoni, ma questo implica che il gioco è finito, assurdo.

    Inoltre, l'unica configurazione in cui ogni mossa porta il giocatore a perdere (chiamiamola configurazione *decisiva*) è quella in cui le altezze delle pile sono $0, 1, 2, \ldots, 52$, in qualche ordine. Infatti, se la differenza di altezza tra a_{i+1} e a_i fosse almeno 2 per un certo i, allora potremmo togliere un gettone da a_{i+1}; se a_1 avesse più di 0 gettoni allora potremmo togliere da questa un gettone.

    Dunque la pila a_i alla fine del gioco avrà $i - 1$ gettoni per ogni $i \in \{1,2,\ldots,53\}$. Il numero N di gettoni che verranno tolti per arrivare alla configurazione decisiva è uguale alla differenza tra il numero di gettoni presenti inizialmente e il numero di gettoni nella configurazione finale, ovvero

    $$N = 2020 - (0 + 1 + \cdots + 52) = 2020 - \frac{52 \cdot 53}{2} = 642.$$

    Dato che possiamo scrivere $N = 4 \cdot 160 + 2$ e dato che ci sono 4 giocatori, quando si arriverà alla configurazione decisiva toccherà a Claudio, dunque Claudio perde.

11. La risposta è **(C)**. Dato che CA è tangente a ω, abbiamo $CP = \frac{AC^2}{CD} = \frac{54^2}{108} = 27$. Inoltre $\angle DAC = \angle CPA$, ma AD è la bisettrice di $\angle BAC$, quindi $\angle BAD = \angle CPA$. Di conseguenza la circonferenza circoscritta al triangolo ABP è tangente alla retta AD, quindi $DB = \frac{DA^2}{DP} = \frac{63^2}{108-27} = 49$. Ora, per il teorema della bisettrice, $\frac{AC}{CD} = \frac{AB}{BD}$ e perciò possiamo concludere che $AB = \frac{AC \cdot BD}{CD} = \frac{54 \cdot 49}{27} = 98$.

12. La risposta è **(D)**. Detto $p(x)$ il polinomio, $p(1)$ è la somma di tutti i coefficienti e $p(-1)$ è la somma a segni alterni dei coefficienti, quelli di indice pari con segno positivo e quelli di indice dispari con segno negativo. Di conseguenza, $p(1)+p(-1)$ è il doppio della somma dei coefficienti di indice pari, mentre $p(1)-p(-1)$ è il doppio della somma dei coefficienti di indice dispari.

    Osserviamo però che in M compaiono, come coefficienti degli a_k di indice pari, le potenze 2^{2k}, mentre come coefficiente di a_{2k+1} compare 3^{2k}.

    Consideriamo allora

$$
\begin{aligned}
p(2)+p(-2) &= 2\left(a_0 + 2^2 a_2 + \ldots + 2^{98} a_{98} + 2^{100} a_{100}\right) \\
p(3)-p(-3) &= 2\left(3a_1 + 3^3 a_3 + \ldots + 3^{97} a_{97} + 3^{99} a_{99}\right).
\end{aligned}
$$

    Dunque

$$
\begin{aligned}
M &= \frac{1}{2}\left(p(2)+p(-2)\right) - \frac{1}{6}\left(p(3)-p(-3)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left((-5)^{50} + (-25)^{50}\right) - \frac{1}{6}\left(5^{50} - (-25)^{50}\right) \\
&= 5^{50}\left(\frac{5^{50}+1}{2} + \frac{5^{50}-1}{6}\right).
\end{aligned}
$$

    A questo punto abbiamo raccolto un 5^{50}, e per concludere ci basta osservare che la quantità fra parentesi è intera ($5^{50}+1$ è pari, così come $5^{50}-1$, che è anche multiplo di 3) e non è multiplo di 5 (perché $4 \cdot 5^{50} + 2$ non è multiplo di 5).

13. La risposta è **64**. Ricordiamo che un numero intero è divisibile per 11 se e solo se la somma delle cifre in posizione pari, meno la somma delle cifre in posizione dispari, è multipla di 11.

    Dal fatto che 11 divide ae si ricava $a = e$.

    Dal fatto che 11 divide abe si ricava che 11 divide $2a - b$: questa condizione, fissato $a \neq 5$, ha soluzione unica, mentre non ne ha se $a = 5$. Sulla base di queste informazioni Fabio sa quindi che ci sono (al massimo) 8 possibilità per a. Inoltre, una volta fissato a, anche i valori di b ed e risultano determinati.

    Dal fatto che 11 divide $abde$ si ricava che $b = d$, quindi anche d è fissato, una volta scelto a.

    Infine, dal fatto che 11 non divide $abcde$ si ricava che 11 non divide $2a + c - 2b$, ovvero 11 non divide $c - b$: questa condizione, ad a (e quindi b) fissato, è soddisfatta se e solo se $c \neq b$. In particolare, per ogni scelta di a in $\{1,2,3,4,6,7,8,9\}$, il numero di possibili c è sempre 8.

    Fabio sa quindi che dovrà provare al massimo 64 combinazioni.

14. La risposta è **4040**. Detto a il coefficiente di testa di $p(x)$, confrontando i coefficienti di testa di $p(x)^2$ e $p\left(x^2\right) + kp(x)$ si ottiene $a^2 = a$, quindi $a = 1$, cioè $p(x)$ è monico. Ora, se $p(x)$ è un monomio si ha sempre $p(x)^2 = p\left(x^2\right)$, cioè l'uguaglianza voluta con $k = 0$. Altrimenti $p(x) = x^n + r(x)$ con $r(x)$ polinomio non nullo di grado $m < n$. Allora $p(x)^2$ è x^{2n} più un polinomio di grado $n+m$, mentre $p\left(x^2\right) + kp(x)$ è x^{2n} più un polinomio di grado al più $\max\{2m,n\}$. L'unica possibilità è che $m = 0$ e quindi $p(x) = x^n + b$ con $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Sostituendo nel testo si ottiene $x^{2n} + 2bx^n + b^2 = x^{2n} + kx^n + (k+1)b$, da cui $k = 2b$ e quindi $b^2 = (2b+1)b$, ovvero $b = -1$. Le soluzioni sono quindi tutte e sole quelle del tipo x^n o $x^n - 1$, per un totale di 4040 polinomi.

15. (a) Se d è un divisore di n allora anche n/d è un divisore di n. Ne segue che per ogni divisore d di $n = k^2$ con $0 < d < k$ esiste un corrispondente divisore n/d con $n/d = k^2/d > k$, e viceversa per ogni divisore d di k^2 con $d > k$ esiste un corrispondente divisore $0 < n/d < k$.

I divisori positivi di k^2 minori di k sono quindi tanti quanti quelli maggiori di k, come voluto.

Soluzione alternativa. Se n è un quadrato perfetto, la sua scrittura in fattori primi è della forma $n = p_1^{2\alpha_1} \cdot p_2^{2\alpha_2} \cdots p_i^{2\alpha_i}$. I suoi divisori sono numeri della forma $p_1^{\beta_1} \cdots p_i^{\beta_i}$, con $o \leq \beta_j \leq 2\alpha_j$ per ogni $j = 1, \ldots, i$. In particolare $k = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_i^{\alpha_i}$. Se scriviamo $n = d \cdot \frac{n}{d}$ come prodotto di due suoi divisori, dobbiamo redistribuire i fattori primi di n tra i due divisori considerati. Avremo dunque che i due fattori sono della forma

$$d = p_1^{\beta_1} \cdots p_i^{\beta_i}, \quad \frac{n}{d} = p_1^{2\alpha_1 - \beta_1} \cdots p_i^{2\alpha_i - \beta_i},$$

che possiamo scrivere, in termini di k, come

$$d = k \cdot p_1^{\beta_1 - \alpha_1} \cdots p_i^{\beta_i - \alpha_i}, \quad \frac{n}{d} = k \cdot p_1^{\alpha_1 - \beta_1} \cdots p_i^{\alpha_i - \beta_i} :$$

stiamo moltiplicando k per un numero e per il suo reciproco, quindi uno tra d e n/d sarà maggiore di k e l'altro sarà minore di k. In particolare per ogni divisore minore di k ce ne è uno maggiore di k.

(b) Per quanto visto nel punto (a), i divisori in tutto sono due volte quelli minori di k più 1 (cioè il divisore k). I numeri interi positivi minori di k sono $k - 1$, quindi n può avere al più $2(k - 1) + 1 = 2k - 1$ divisori.

(c) Continuando il ragionamento fatto al punto (b), dire che $n = k^2$ ha $2k - 1$ divisori significa che tutti i numeri interi positivi minori o uguali a k dividono n. Osserviamo che per $k = 1$ si ha $n = 1$, che ha un unico divisore positivo (se stesso), per cui in effetti il numero di divisori è $2k - 1 = 2 \cdot 1 - 1$. Similmente, per $k = 2$ si ha $n = 4$, che ha come divisori 1, 2 e 4, come voluto: $2 \cdot 2 - 1 = 3$. Osserviamo poi che un intero n non ha divisori > 1 in comune con $n - 1$. Se $k \geq 3$ questo porta ad una contraddizione: abbiamo osservato che $k - 1 > 1$ deve dividere k^2, e questo è assurdo perché $k - 1$ divide $n - 1 = k^2 - 1 = (k + 1)(k - 1)$. Non ci sono quindi soluzioni per $k \geq 3$, dunque i k voluti sono solo $k = 1$ e $k = 2$.

16. Indichiamo i centri usando le coordinate dei quadretti, così che i centri della riga inferiore sono i punti $(0{,}0), \ldots, (2019{,}0)$ e quelli della riga superiore sono $(0{,}1), \ldots, (2019{,}1)$.

(a) Consideriamo l'insieme di segmenti S che collegano le seguenti coppie di punti:

(i) $(0{,}0) - (k{,}1)$ per $k = 1, \ldots, 2019$;

(ii) $(0{,}0) - (0{,}1)$;

(iii) $(k{,}0) - (0{,}1)$ per $k = 1, \ldots, 2019$.

Nel precedente elenco nessuna coppia compare due volte, dunque anche i segmenti corrispondenti sono diversi. Siccome al primo punto abbiamo indicato 2019 coppie, al secondo 1 coppia, e al terzo 2019 coppie, in totale quelle elencate sono 4039 coppie diverse.

Scegliamo due segmenti qualsiasi $s_1, s_2 \in S$. Se nessuno è del tipo (iii), allora $s_1 \cap s_2 = (0{,}0)$; similmente, se nessuno è del tipo (i), allora $s_1 \cap s_2 = (0{,}1)$. Se invece s_1 è del tipo (i) e s_2 è del tipo (iii), o viceversa, allora s_1 e s_2 sono le diagonali (interne) del quadrilatero convesso non intrecciato i cui vertici sono $(0{,}0), (x_{s_2}{,}0), (x_{s_1}{,}1), (0{,}1)$, quindi si intersecano.

Riassumendo, abbiamo i seguenti due fatti:

- $|S| = 4039$;
- ogni coppia di segmenti in S si interseca.

Se avessimo a disposizione non più di 4038 colori, per il principio dei cassetti almeno due segmenti in S avrebbero lo stesso colore, ma ciò è incompatibile con la richiesta che segmenti non disgiunti abbiano colori diversi.

(b) Enumeriamo i 4039 colori in questo modo: $-2019, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, 2019$.

Una colorazione dei segmenti valida è la seguente: il segmento fra $(x_1, 0)$ e $(x_2, 1)$ viene colorato con il colore $x_2 - x_1$.

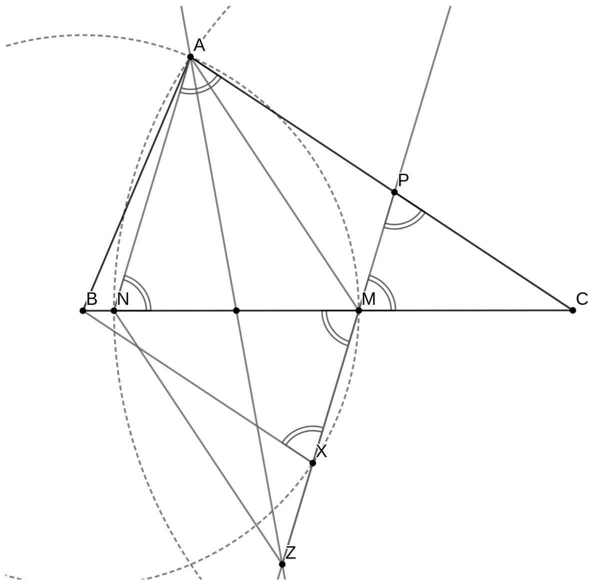
Mostriamo che due segmenti qualsiasi s_1, s_2 dello stesso colore c non si intersecano. Sia $(x_1, 0)$ il primo vertice di s_1: allora il secondo deve essere $(x_1 + c{,}1)$; similmente sia $(x_2, 0)$

il primo vertice di s_2, e di conseguenza $(x_2 + c, 1)$ il secondo. Allora s_1 e s_2 sono due lati opposti del quadrilatero che ha per vertici $(x_1, 0), (x_2, 0), (x_2 + c, 1), (x_1 + c, 1)$. Questo quadrilatero è un parallelogramma (non intrecciato) perché gli altri due lati sono paralleli e hanno lunghezza c. Dunque s_1 e s_2 non si intersecano.

17. (a) Il quadrilatero $ANZM$ è un parallelogramma perché le diagonali si intersecano nel loro punto medio per costruzione. Le rette AN e MZ sono dunque parallele. Su questa coppia di rette parallele, le trasversali CN e CA staccano angoli corrispondenti uguali ($\angle CMP = \angle CNA$ e $\angle CPM = \angle CAN$). Rimane solo da osservare che $CA = CN$ perché raggi della circonferenza γ: da questo segue che il triangolo NCA è isoscele su NA, dunque che gli angoli alla base $\angle CAN = \angle CNA$ sono uguali. In conclusione, sappiamo che

$$\angle CPM = \angle CAN = \angle CNA = \angle CMP,$$

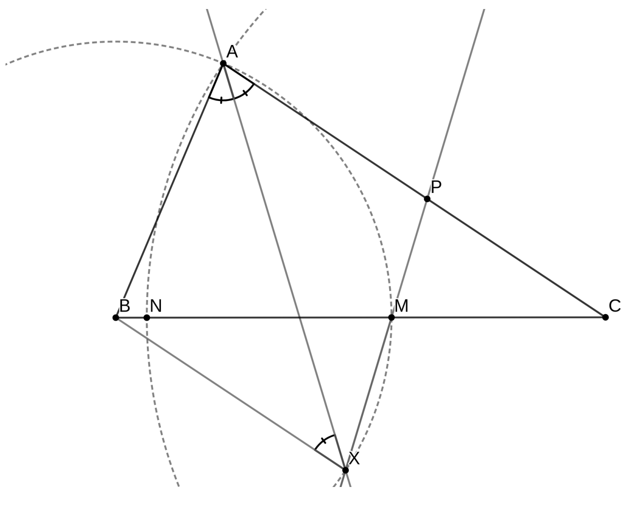
ovvero che $\triangle MCP$ è isoscele su MP.



(b) Il triangolo BMX è isoscele perché $BM = BX$ sono raggi della circonferenza ω, dunque gli angoli alla base $\angle BXM = \angle BMX$ sono uguali. Per di più, $\angle BMX$ è l'opposto al vertice di $\angle CMP$, che sono pertanto uguali tra loro. Segue, per il punto (a), che tutti gli angoli in questione sono uguali anche a $\angle MPC$:

$$\angle BXM = \angle BMX = \angle CMP = \angle MPC.$$

L'uguaglianza tra i due estremi ci dice che la trasversale PX stacca sulla coppia di retta BX e AC angoli alterni interni uguali, provandone il parallelismo.



(c) Il triangolo ABX è isoscele perché $BA = BX$ sono raggi della circonferenza ω, dunque gli angoli alla base $\angle BAX = \angle BXA$ sono uguali. La trasversale AX stacca sulla coppia di rette $BX \parallel AC$, parallele per il punto (b), angoli alterni interni uguali $\angle BXA = \angle CAX$. Abbiamo ottenuto che

$$\angle BAX = \angle BXA = \angle CAX,$$

ovvero che X giace sulla bisettrice dell'angolo $\angle BAC$. Ripetendo lo stesso ragionamento per il punto Y, con gli opportuni cambi di lettere, si ottiene che anch'esso giace sulla bisettrice dell'angolo $\angle BAC$, da cui la tesi.

Scale di valutazione degli esercizi dimostrativi

Esercizio 15

Si assegnino **15 punti** a una soluzione interamente corretta, anche diversa da quella proposta. Per soluzioni incomplete si assegnino punti parziali secondo il seguente schema:

- Il punto (a) vale **5 punti**. Per chi seguisse la linea della seconda soluzione proposta, si assegni fino ad 1 **punto** a chi scriva la fattorizzazione in primi di n, fino a 2 **punti** per chi consideri *contemporaneamente* la fattorizzazione di d e di n/d, e fino a 4 **punti** a chi rappresenti un divisore nella forma $d = k\alpha$ con α non necessariamente intero.

- Il punto (b) vale **5 punti**. Si assegnino tutti e cinque i punti anche a chi osservi solo che il punto (b) segue dal punto (a), senza essere riuscito a dimostrare quest'ultimo.

- Il punto (c) vale **5 punti**. Non si assegni più di **1 punto** a chi scrivesse quali sono i k senza alcuna giustificazione della risposta. Si assegnino fino a **2 punti** per chi osservi esplicitamente (anche senza verifica) che $k = 1, 2$ rispettano le condizioni del testo. Si assegni inoltre **1 punto** (cumulabile con i precedenti) per chi osservi che n deve essere divisibile per tutti i numeri $1, 2, \ldots, k$.

Esercizio 16

Si assegnino **15 punti** a una soluzione interamente corretta, anche diversa da quella proposta. Per soluzioni incomplete si assegnino punti parziali secondo il seguente schema:

- Il punto (a) vale **9 punti**. Di questi:
  - **3 punti** per l'osservazione che tutti i segmenti che partono da uno stesso vertice sono 2020 e si intersecano tutti.
  - A chi enunciasse solamente l'idea di andare alla ricerca di insiemi di segmenti che si intersecano tutti tra loro si diano **2 punti**, in alternativa a quelli del punto precedente.
  - Non più di **7 punti** a chi non giustificasse bene il fatto che i segmenti nella lista si intersecano tutti a coppie. Si noti in particolare che se sostituissimo a (0,0) e (0,1) con altri vertici all'interno della striscia, questa proprietà non sarebbe più vera.

- Il punto (b) vale **6 punti**. Di questi **3 punti** sono per l'esibizione della costruzione, anche con un disegno, mentre **3 punti** sono per il mostrare che tale costruzione effettivamente funziona.

Esercizio 17

Si assegnino **15 punti** a una soluzione interamente corretta, anche diversa da quella proposta. Per soluzioni incomplete si assegnino punti parziali secondo il seguente schema:

- Il punto (a) vale **5 punti**. Di questi:
  - **2 punti** per il parallelismo di AN e ZM.
  - **2 punti** per la similitudine tra i triangoli CMP e CNA.
  - **1 punto** per la dimostrazione che CNA è isoscele.

- Il punto (b) vale **5 punti**. Di questi, **3 punti** per l'uguaglianza degli angoli BXM e MPC.

- Il punto (c) vale **5 punti**. Di questi si diano fino a **4 punti** a chi mostrasse solamente che uno tra X e Y appartiene alla bisettrice. Per le uguaglianze $BAX = BXA$ e $BXA = CAX$ (o le corrispondenti uguaglianze per Y, $CAY = CYA$ e $CYA = YAB$), senza che si arrivi ad altre conclusioni si diano al più **3 punti**.